8 Vektorer

8.1 Vektorer

> **restart:**

En vektor illustreres ofte med en bokstav med en pil over, $\vec{v}$. Det er like vanlig og enklere å angi vektorer med fete bokstaver, **v**.

En vektor kan skrives på listeform med x- og y- koordinatene som elementer i listen.

$$\mathbf{v} = [x, y]$$

Skal vi få tegnet opp en vektor i Maple, må vi angi x og y ved tallstørrelser. Maple-kommandoen arrow tegner opp en vektor. For å gjøre denne kommandoen enklere å bruke, er den tilpasset noe i kommandoen **Vektor**.

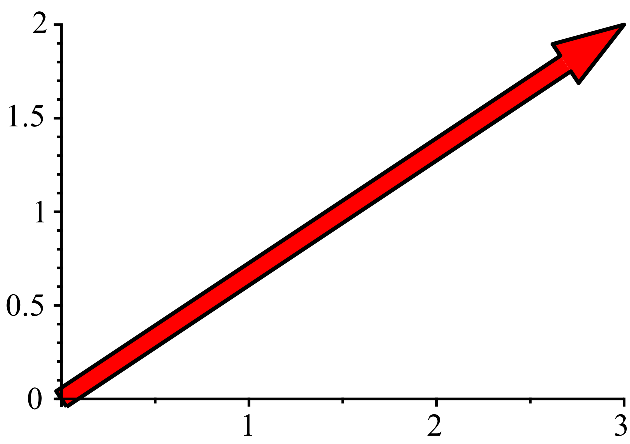
- Vektor i vgs-pakken plotter en vektor med startpunkt i P og sluttpunkt i Q

- PlottVektorSum i vgs-pakken plotter en sum av vektorer

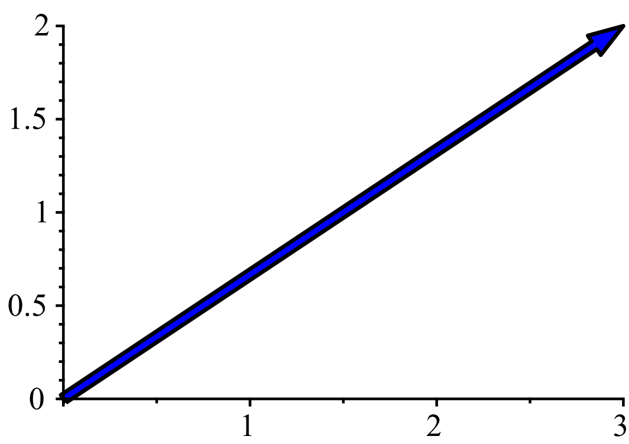
Plotter vi en vektor fra $P = [0, 0]$ til $Q = [3, 2]$, får vi f.eks.

> $P := [0, 0] : Q := [3, 2] :$

> $Vektor(P, Q, 0.1, color = red)$



> $Vektor(P, Q, 0.05, color = blue)$



Addisjon av vektorer i planet

> $a := Vektor([0, 0], [2, 1], 0.07, color = red) :$
$b := Vektor([2, 1], [3, 2], 0.07, color = red) :$

$c := Vektor([3, 2], [4, -1], 0.07, color = red) :$
$d := Vektor([4, -1], [2, -2], 0.07, color = red) :$
$e := Vektor([0, 0], [2, -2], 0.07, color$

> plt

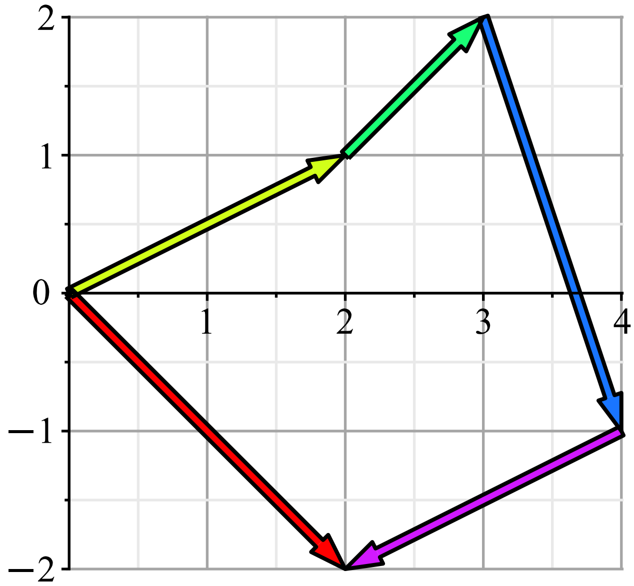
$= blue)$:

$plt := display(a, b, c, d, e)$:

> $L := [[2, 1], [1, 1], [1, -3], [-2, -1]]$:

> $PlottVektorSum(L, 0.07)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$$



>

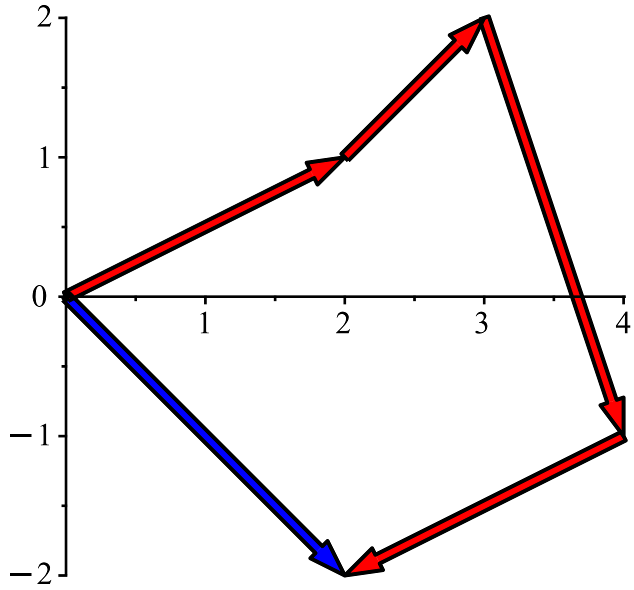
Addisjon av vektorer i rommet

> $a := Vektor([0, 0, 0], [2, 1, 1], 0.15, color = red)$:

$b := Vektor([2, 1, 1], [3, 2, 2], 0.15, color = red)$:

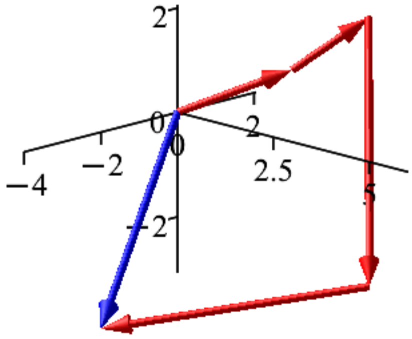
$c := Vektor([3, 2, 2], [6, -1, -2], 0.15, color = red)$:

$d := Vektor([6, -1, -2], [2, -4, -3], 0.15, color = red)$:



> plt

$e := \mathit{Vektor}([0, 0, 0], [2, -4, -3], 0.15, \mathit{color} = \mathit{blue}) :$
$\mathit{plt} := \mathit{display}(a, b, c, d, e, \mathit{tickmarks} = [3, 3, 3]) :$



Noen regneregler for vektorer

$> a := [x_1, y_1];\ b := [x_2, y_2]$

$$a := [x_1, y_1]$$

$$b := [x_2, y_2]$$

$> \text{'}a + b\text{'} = a + b$

$$a + b = [x_2 + x_1, y_2 + y_1]$$

$> \text{'}a - b\text{'} = a - b$

$$a - b = [-x_2 + x_1, -y_2 + y_1]$$

$> k\, a = \mathit{expand}(k\, a)$

$$k\, [x_1, y_1] = [x_1\, k, y_1\, k]$$

$> k\, (a + b) = \mathit{expand}(k\, (a + b))$

$$k\, [x_2 + x_1, y_2 + y_1] = [x_1\, k + x_2\, k, y_1\, k + y_2\, k]$$

Eksempel 8.1.1

Bestem og plott vektorene

a + 2**b** , **b** − **a**, 2**a** − 2**b**, 2**b** − **a**

der **a** = [−1, 1], **b** = [2, −1]

Løsning

$> a := [-1, 1] :\ b := [2, 1] :\ P := [0, 0] :$

$> \mathit{va}, \mathit{vb}, \mathit{v2b}, \mathit{v2a} := \mathit{Vektor}(P, a, 0.1, \mathit{color} = \mathit{red}), \mathit{Vektor}(P, b, 0.1, \mathit{color} = \mathit{blue}), \mathit{Vektor}(P, 2\, b, 0.1, \mathit{color} = \mathit{blue}), \mathit{Vektor}(P, 2\, a, 0.1, \mathit{color} = \mathit{red}) :$

$> \text{'}a + 2\, b\text{'} = a + 2\, b$

$$a + 2\, b = [3, 3]$$

$> \mathit{v1} := \mathit{rhs}(\%) :$

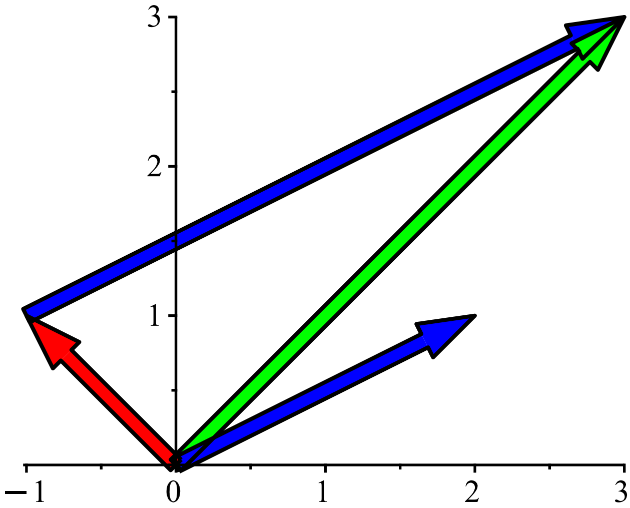
$> \mathit{display}(\mathit{va}, \mathit{vb}, \mathit{Vektor}(P, \mathit{v1}, 0.1, \mathit{color} = \mathit{green}), \mathit{Vektor}(a, \mathit{v1}, 0.1, \mathit{color} = \mathit{blue}))$

$> \text{'}b - a\text{'} = b - a$

$$b - a = [3, 0]$$

$> \mathit{v2} := \mathit{rhs}(\%) :$

$> \mathit{display}(\mathit{va}, \mathit{vb}, \mathit{Vektor}(P, \mathit{v2}, 0.1, \mathit{color} = \mathit{green}), \mathit{Vektor}(b, \mathit{v2}, 0.1, \mathit{color} = \mathit{red}))$

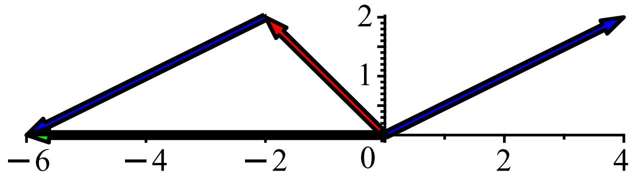


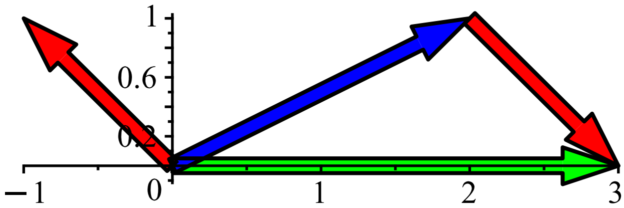
> '2 *a* − 2 *b*' = 2 *a* − 2 *b*

$$2\,a - 2\,b = [-6, 0]$$

> *v3* := *rhs*(%) :

> *display*(*v2a*, *v2b*, *Vektor*(*P*, *v3*, 0.1, *color* = *green*), *Vektor*(2 *a*, *v3*, 0.1, *color* = *blue*))



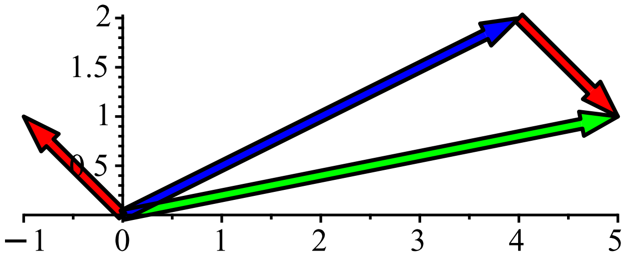


> '2 *b* − *a*' = 2 *b* − *a*

$$2\,b - a = [5, 1]$$

> *v4* := *rhs*(%) :

> *display*(*va*, *v2b*, *Vektor*(*P*, *v4*, 0.1, *color* = *green*), *Vektor*(2 *b*, *v4*, 0.1, *color* = *red*))



8.2 Skalarproduktet av to vektorer

> *restart* :

Produktet av to vektorer, skalarproduktet, er definert som

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(v)$$

der vinkelen v er vinkelen mellom pilretningene. Kommandoen for skalarprodukt finnes i programpakken linalg, men den krever at vektorene er gitt på koordinatform. Derfor venter vi med denne kommandoen til **kapittel 8.4**. Skalarproduktet definert over kan vi definere selv som en funksjon av vektorenes lengder og vinkelen.

Eksempel 8.2.1
Regn ut skalarproduktet av vektorene **a** og **b** med lengdene henholdsvis 3 og 4 når vinkelen mellom dem er 0°, 60°, 90°, 120°, 180° og 310°

Løsning

Skalarproduktet defineres som

$$> sp := (a, b, v) \mapsto |a| \cdot |b| \cdot \cos\left(\frac{v \cdot \pi}{180}\right) :$$

$$|\mathbf{a}| = 3, \ |\mathbf{b}| = 4$$

$$v = 0°$$

$$> a \bullet b = sp(3, 4, 0)$$

$$a \bullet b = 12$$

$$v = 60°$$

$$> a \bullet b = sp(3, 4, 60);$$

$$a \bullet b = 6$$

$$v = 90°$$

$$> a \bullet b = sp(3, 4, 90);$$

$$a \bullet b = 0$$

$$v = 120°$$

$$> a \bullet b = sp(3, 4, 120);$$

$$a \bullet b = -6$$

$$v = 180°$$

$$> a \bullet b = sp(3, 4, 180);$$

$$a \bullet b = -12$$

$$v = 310°$$

$$> a \bullet b = sp(3, 4, 310);$$

$$a \bullet b = 12\cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)$$

$$> evalf(\%)$$

$$a \bullet b = 7.713451314$$

8.3 Vektorer i koordinatsystemet
Reglene for multiplikasjon, addisjon og subtraksjon av to vektorer er alt nevnt i **kapittel 8.1**.

$$> a := [x_1, y_1];\ b := [x_2, y_2]$$

$$a := [x_1, y_1]$$

$$b := [x_2, y_2]$$

Vi har at

$$> t\,a = expand(t\,a)$$

$$t\,[x_1, y_1] = [x_1\,t, y_1\,t]$$

$$> 'a + b' = a + b$$

$$a + b = [x_2 + x_1, y_2 + y_1]$$

$$> 'a - b' = a - b$$

$$a - b = [-x_2 + x_1, -y_2 + y_1]$$

Lengden av en vektor **a** med koordinatene x og y er definert ved.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

I programpakken LinearAlgebra finnes en egen kommando for lengden av en vektor. Vektoren må da være en kolonnevektor.

- Norm(**a**,2) beregner lengden av en vektor **a** på formen $\langle x, y\rangle$
- Lengde(**a**) i vgs-pakken beregner lengden av en vektor **a** både på formen $\langle x, y\rangle$ og $[x, y]$

> $a := \langle x, y\rangle$

$$a := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

> `` `|a|` = Norm(a, 2) ``

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

> $Lengde(a)$

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

> $Lengde([x, y])$

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

>

Eksempel 8.3.13

Gitt vektorene $\mathbf{F}_1 = [3, 4]$, $\mathbf{F}_2 = [0, 3]$,$\mathbf{F}_3 = [-1, 5]$, $\mathbf{F}_4 = [-3, 0]$, $\mathbf{F}_5 = [-2, 2]$. Finn resultantkraften $\mathbf{F}$ og $|\mathbf{F}|$.

Løsning

De gitte vektorene er

> $F1 := [3, 4] : F2 := [0, 2] :$
$F3 := [-1, 5] : F4 := [-3, 0] : F5 := [-2, -2] :$

Resultantkraften er

> $F := F1 + F2 + F3 + F4 + F5$

$$F := [-3, 9]$$

Absoluttverdien er

> `` `|F|` = Lengde(F) ``

$$|F| = 3\sqrt{10}$$

> $v1 := Vektor([0, 0], F1, 0.15, color = red) :$
$v2 := Vektor(F1, F1 + F2, 0.15, color = red) :$
$v3 := Vektor(F1 + F2, F1 + F2 + F3, 0.15, color = red) :$

> $PlottVektorSum([F1, F2, F3, F4, F5], 0.15)$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} +$$

> $v4 := Vektor(F1 + F2 + F3, F1 + F2 + F3 + F4, 0.15, color = red) :$
$v5 := Vektor(F1 + F2 + F3 + F4, F1 + F2 + F3 + F4 + F5, 0.15, color = red) :$
$v := Vektor([0, 0], F, 0.15, color = blue) :$

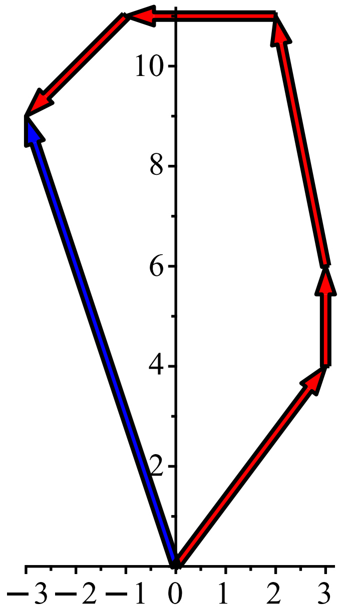
Vi hekter vektorene på hverandre.

> $display(v1, v2, v3, v4, v5, v)$

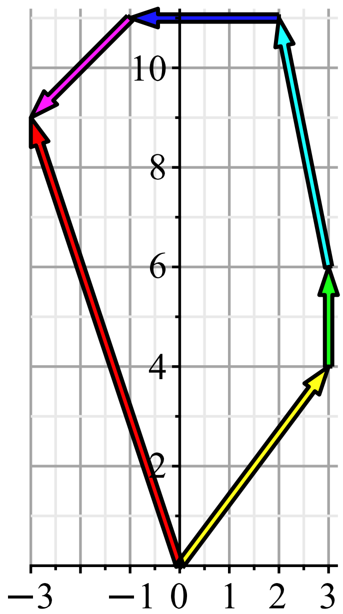
>

>

>



$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 \end{bmatrix}$$



>

8.4 Skalarproduktet på koordinatform

Med $\mathbf{a} = [x_1, y_1]$ og $\mathbf{b} = [x_2, y_2]$ kan skalarproduktet

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(v)$$

skrives

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1\, x_2 + y_1\, y_2$$

Skalarproduktet eller prikkproduktet beregnes med

- DotProduct($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$) beregner skalarproduktet av vektorene $\mathbf{a} = [x_1, y_1]$ og $\mathbf{b} = [x_2, y_2]$

eller

< **a** >.< **b** > hvis **a** og b er gitt på formen $\mathbf{a} = < x_1, y_1 >$, $\mathbf{b} = < x_2, y_2 >$

- SkalarProdukt (**a**, **b**) i vgs-pakken der vektorene er gitt ved [**a**, **b**] eller <**a**, **b**>

Ved hjelp av formlene for skalarproduktet kan vi finne vinkelen mellom vektorene **a** og **b**. Vinkelen er gitt ved kommandoen angle.
Med

$> a, b := [x_1, y_1], [x_2, y_2]:$

$> DotProduct(\langle a \rangle, \langle b \rangle)$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$> SkalarProdukt(a, b)$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2$$

blir vinkelen ϕ mellom vektorene beregnes av VectorAngle eller Vinkel i vgs-pakken når a og b er gitt ved tall

$> \phi = VectorAngle(\langle a \rangle, \langle b \rangle, conjugate = false)$ #` `conjugate = false pga vektorer med bokstaver

$$\phi = \arccos\left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}\right)$$

eller

$> Vinkel([1, 3], [4, 3])$ #gitt i grader

$$34.69515352$$

$> VectorAngle(\langle 1, 3 \rangle, \langle 4, 3 \rangle)$ #gitt i radianer

$$\arccos\left(\frac{13\sqrt{10}}{50}\right)$$

$> evalf\left(\frac{\%}{\mathrm{Pi}} \cdot 180\right)$

$$34.69515352$$

$>$

Eksempel 8.4.1

Gitt $\triangle$ ABC med hjørner i $A(-4, 2)$, $B(2, -3)$, $C(4, 4)$.
a) Finn |**AC**|, |**AB**| og |**AC**|.
b) Regn ut   vinklene i trekanten.
c) Finn koordinatene til punkt M, når M er midtpunktet på AC
d) Vis at $2\ BM = BC + BA$

Løsning

$> A := [-4, 2] : B := [2, -3] : C := [4, 4] :$

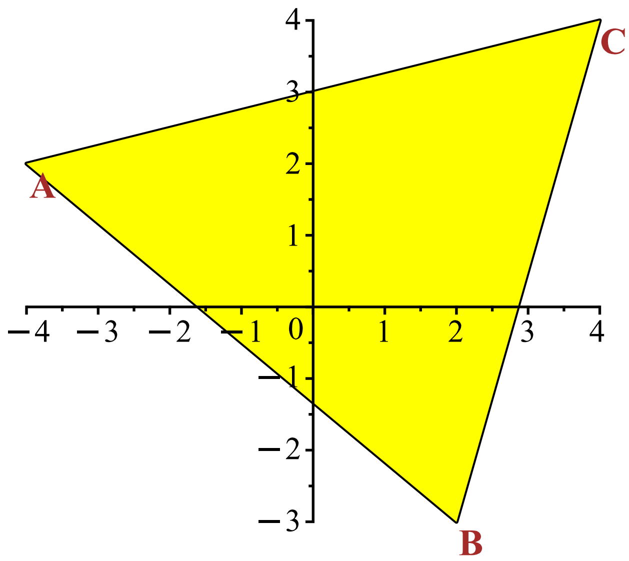
Vi plotter først trekanten ABC.

```
> plt1 := polygonplot([A, B, C, A], color
     = yellow, scaling = constrained) :
  plt2 := textplot([[-4, 2, "A"], [2, -3,
     "B"], [4, 4, "C"]], align = {BELOW,
     RIGHT}, font = [TIMES, BOLD, 14],
     color = brown) :
  display(plt1, plt2)
```

b)
Radianer omdannes til grader ved multiplikasjon med $\frac{180}{\pi}$

$> \phi['A'] := Vinkel(AC, AB)$

$$\phi_A := 53.84181456$$



a) Lengdene av vektorene

> $AC := C - A;\ AB := B - A;\ BC := C - B$

$$AC := [8, 2]$$

$$AB := [6, -5]$$

$$BC := [2, 7]$$

er

> $`|AC|` = Lengde(A)$

$$|AC| = 2\sqrt{5}$$

> $`|AB|` = Lengde(AB)$

$$|AB| = \sqrt{61}$$

> $`|BC|` = Lengde(BC)$

$$|BC| = \sqrt{53}$$

> $CA := A - C:\ CB := B - C:$
> $\phi['C'] := Vinkel(CA, CB)$

$$\phi_C := 60.01836064$$

> $BA := A - B:\ BC := C - B:$
> $\phi['B'] := Vinkel(BA, BC)$

$$\phi_B := 66.13982482$$

c)

Midtpunktets koordinater er

> $M := \frac{C + A}{2}$

$$M := [0, 3]$$

d)

> $BM := M - B$

$$BM := [-2, 6]$$

> $'2\ BM = BC + BA'$

$$2\ BM = BC + BA$$

> %

$$[-4, 12] = [-4, 12]$$

>